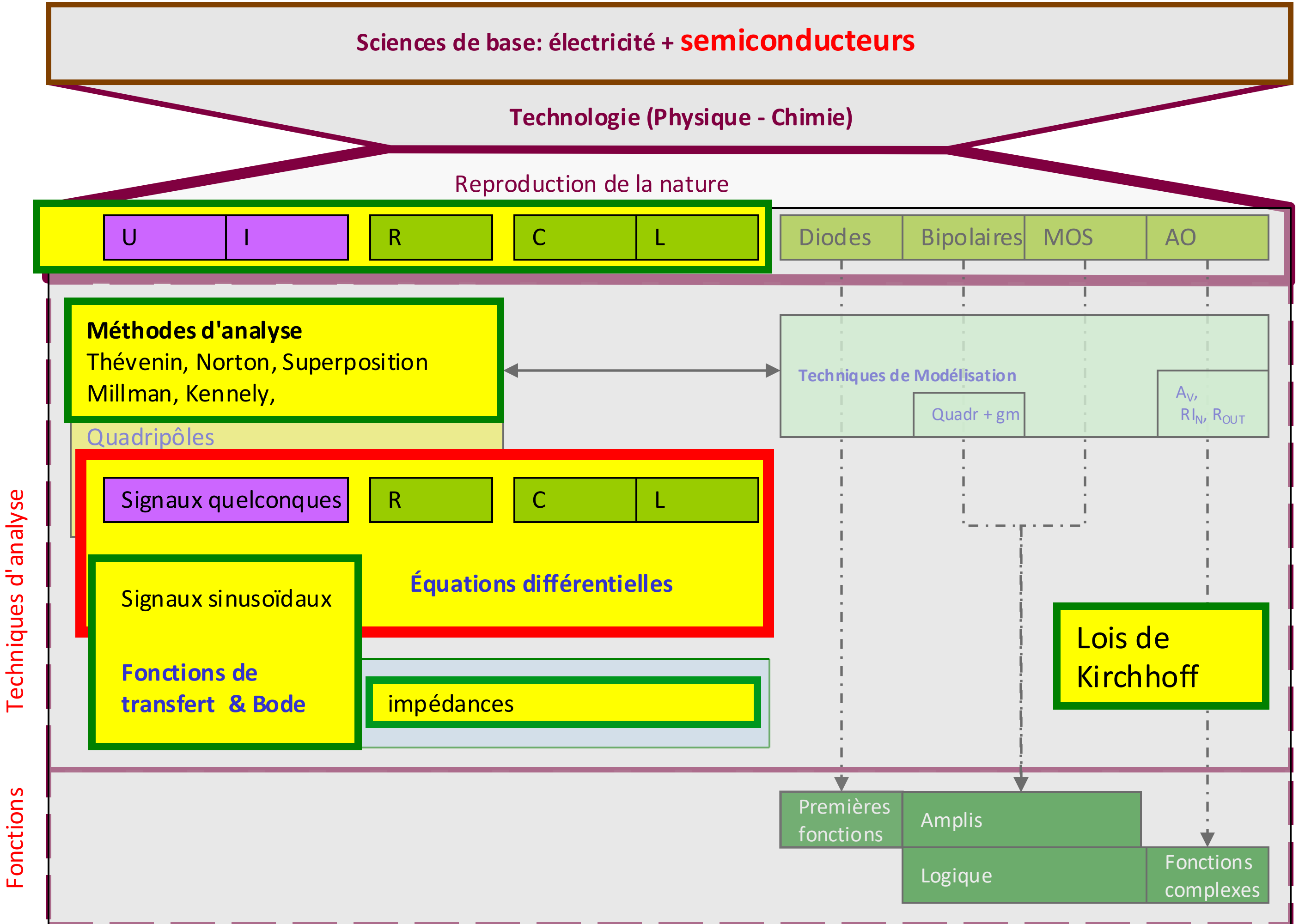
Relations entre les différentes notions

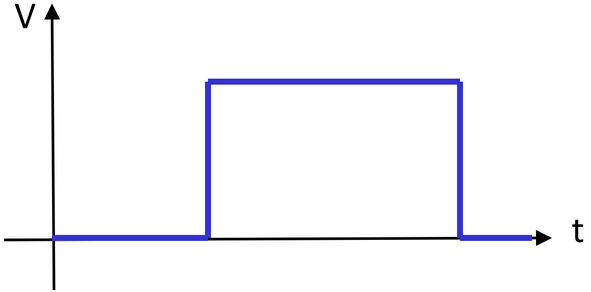


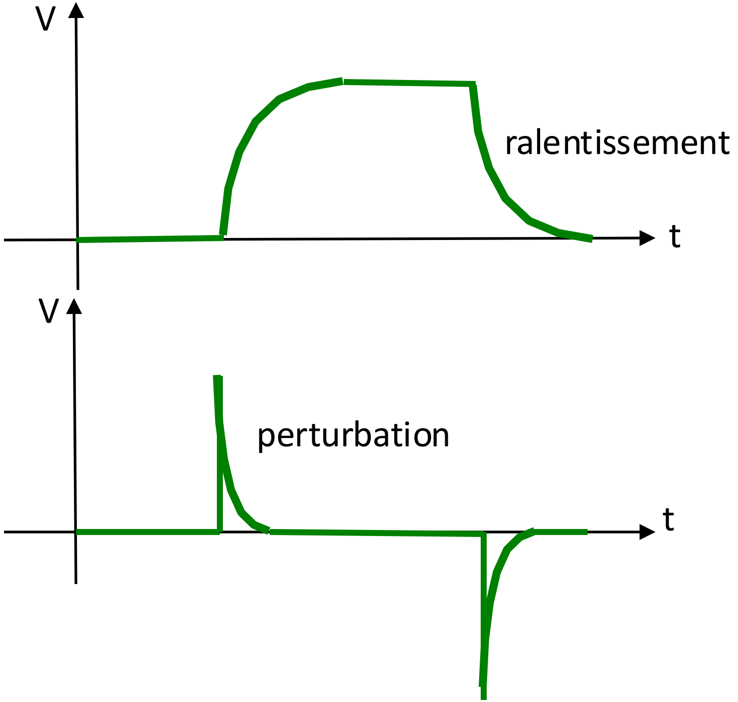
Sauts indiciels (signaux carrés)

Les combinaisons R et C forment des filtres (volontaires ou involontaires)

Leur analyse temporelle pour les sauts indiciels :

- Explique les limites en fréquence des circuits numériques
- Couplage parasite produisant des perturbations





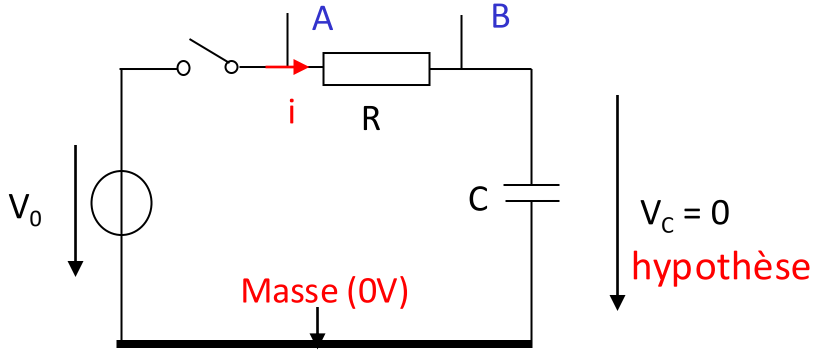
Comprendre:

- Une formule magique
- Une recette de cuisine

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Observations

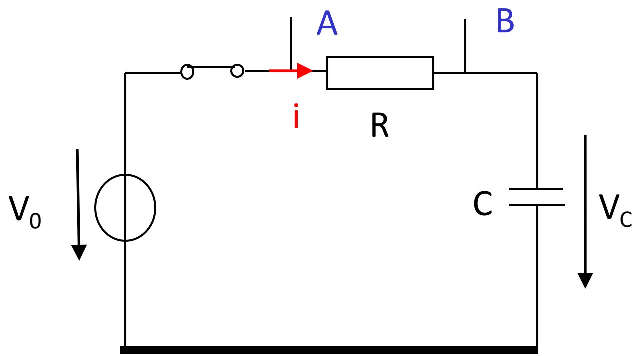
Situation avant l'événement



État avant le saut

$$\begin{cases} i = 0 \\ V_C = 0 \quad \text{hypothèse} \\ V_B = 0 \\ V_A = 0 \end{cases}$$

Situation après l'événement

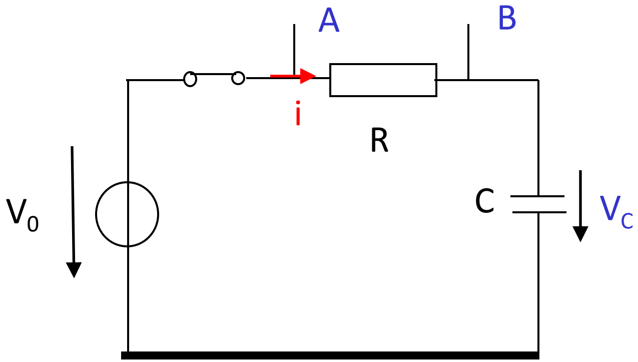


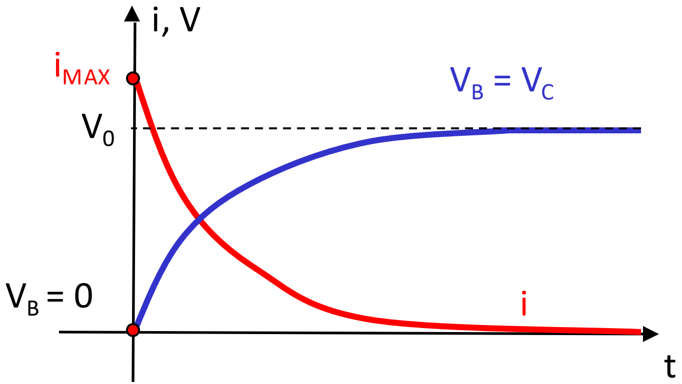
	$t_0 = 0$	$t_1 > t_0$	$t_2 >> t_0$
V_C	0	↗	$V_C = V_A = V_0$
V_B	0	↗	$V_B = V_A = V_0$
V_A	V_0	=	=
i	$\frac{(V_A - V_B)}{R}$	↘	0

$V_C = V_B$

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse graphique





Faciles à calculer

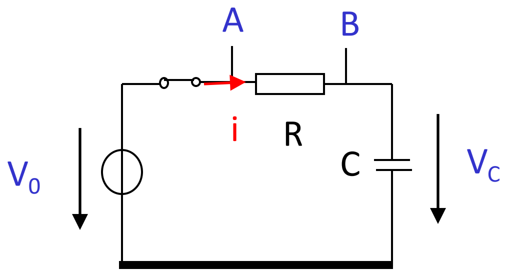
$$i_{MAX} = \frac{V_0}{R} \; et \;\; i_{MIN} = 0$$

$V_{B\_MIN} = 0$ et $V_{B\_MAX} = V_0$

Comment déterminer les allures des courbes?

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse mathématique: Expression



$$\boxed{\begin{aligned} i &= \frac{V_0 - V_C}{R} = C\frac{dV_C}{dt} \\ V_0 &= RC\frac{dV_C}{dt} + V_C \end{aligned}}$$

- Discours mathématique: Équations sans et avec second membre
- Discours physique: Calcul du transitoire et du permanent

TRANSITOIRE :

Ne dépend pas de l’excitation

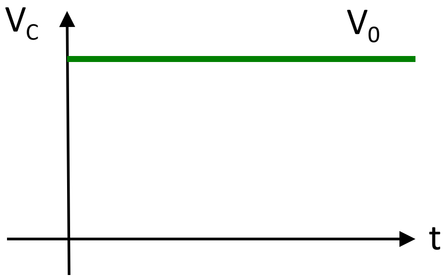
Comportement pour revenir à l’état d’équilibre

Équation sans second membre : $0 = RC\frac{dV_C}{dt} + V_C$

PERMANENT :

Dépend de l'excitation. V_C a l'allure de V_0

$$V_0 = cte \Rightarrow V_C = cte \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = 0 \Rightarrow V_C = V_0$$



Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse mathématique: Développement

$$RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \Rightarrow RC\frac{dV_C}{dt} = -V_C \Rightarrow \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int \frac{dV_C}{V_C} = \int -\frac{dt}{RC} = -\frac{1}{RC}\int dt$$

$$Log(V_C) = -\frac{t}{RC} + K_1$$

$$V_C = e^{-\frac{t}{RC}+K_1} = e^{-\frac{t}{RC}}.e^{K_1} = K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

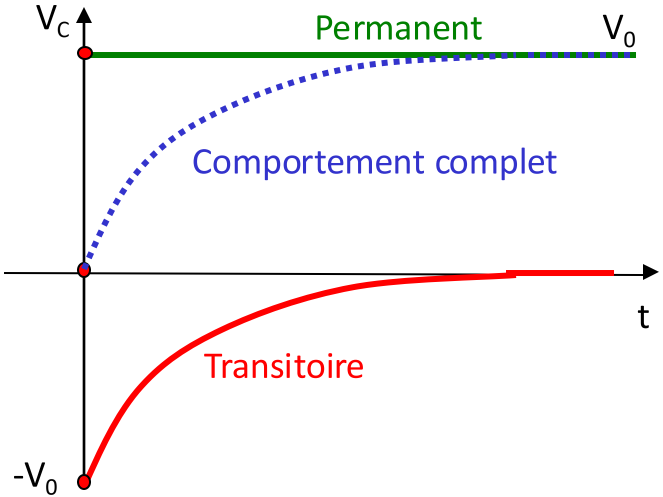
Comportement complet = Transitoire + Permanent

$$\boxed{V_C \;= V_0 + K_2 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{et} \quad K_2???}$$

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse mathématique: Cas particulier

Cas particulier: $V_C(0) = 0 \Rightarrow 0 = V_0 + K_2.e^0 \Rightarrow -V_0 = K_2$



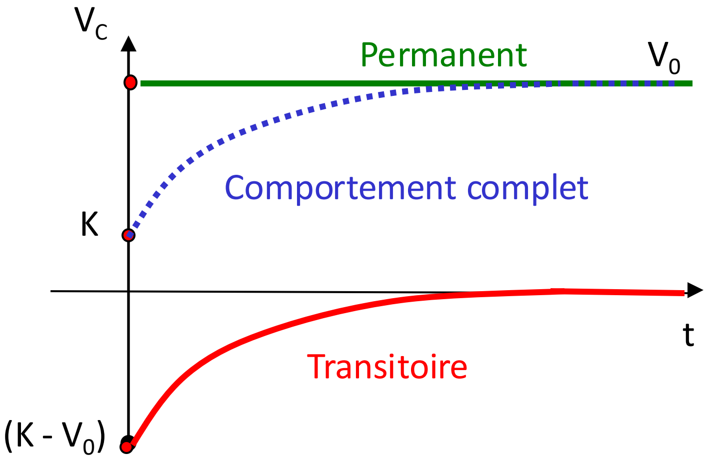
$$\boxed{V_C = V_0.\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse mathématique: Condition initiale différente

$$\boxed{V_C = V_0 + K_2 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$V_C(0) = K(charge\ initiale) \Rightarrow K = V_0 + K_2.e^0 \Rightarrow K - V_0 = K_2$$

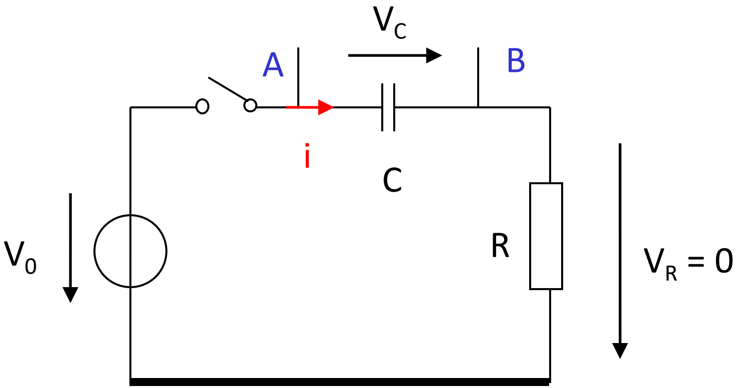


$$\boxed{V_C = V_0 + (K - V_0).e^{-\frac{t}{RC}} = K + (V_0 - K).\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Haut

Observations

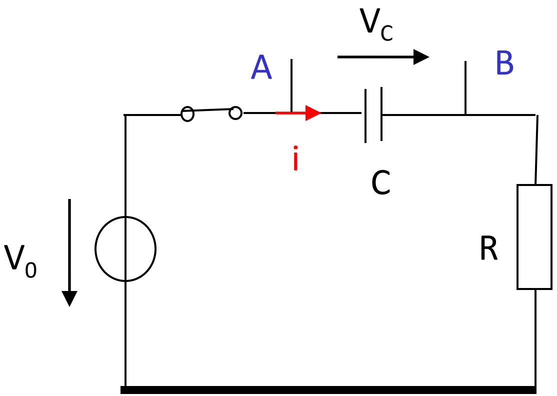
Situation avant l'événement



État avant le saut

$$\begin{cases} i = 0 \\ V_C = 0 \quad \text{hypothèse} \\ V_B = 0 \\ V_A = 0 \end{cases}$$

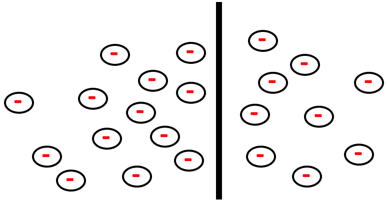
Situation après l'événement



	$t_0 = 0$	$t_1 > t_0$	$t_2 >> t_0$
V_C	$V_C \stackrel{?}{=} 0$	$Q = C.V_C$	
V_B	$V_B \stackrel{?}{=} V_0$		
V_A	V_0		
i	?		

Comportement de la capacité

Vision physique



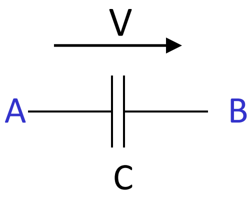
Δt= 0

ΔQ = 0

Si $\Delta t = 0 \Rightarrow \; \Delta Q = 0$

$or, \; pour \; une \; capacité \; \Delta Q = C\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$

$V = V_A - V_B \;\; or \;\; \Delta V = \Delta V_A - \Delta V_B = 0 \Rightarrow \Delta V_A = \Delta V_B$

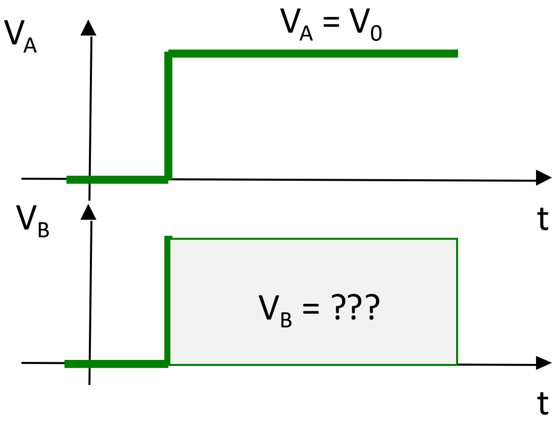


Autre vision

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Si ω = 0, C assimilable à un circuit ouvert

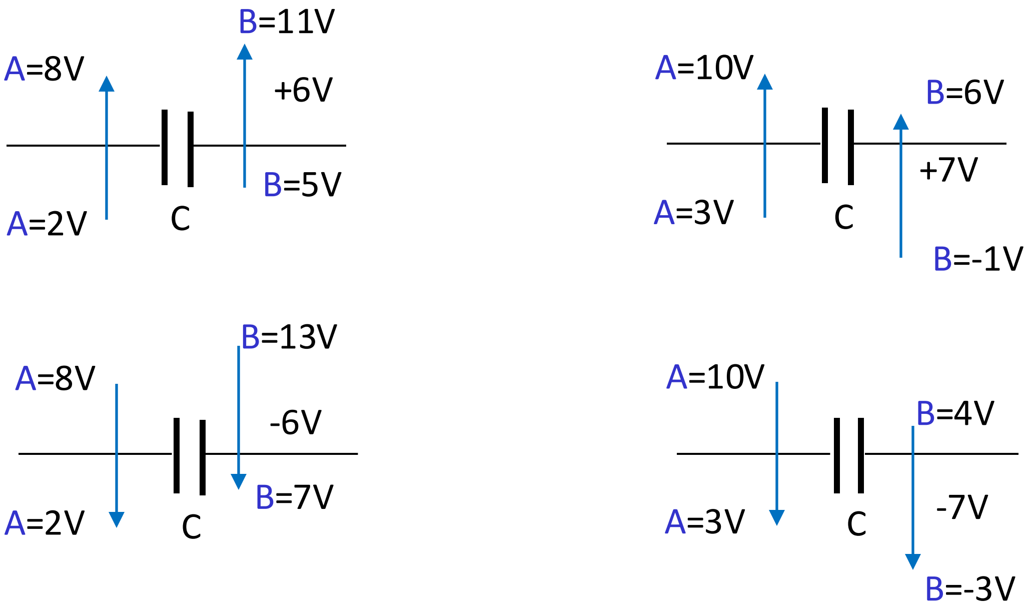
Si ω = infini, C assimilable à un court circuit



Conséquences: quelques exemples de sauts

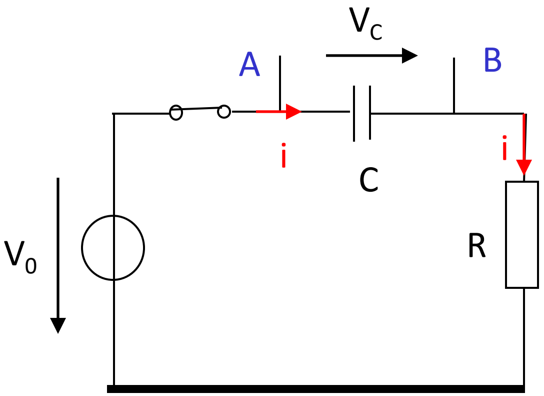
Avec un saut qui s'effectue en un temps nul on peut appliquer le théorème de superposition

- L'état qui précédait le saut (assimilable à la contribution d'une source continue)
- L'effet du saut (assimilable à la contribution d'une source variable)



Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Haut

Analyse complète



	$t_0 = 0$	$t_1 > t_0$	$t2 >> t_0$
V_C	0	$\nearrow$	V_0
V_B	$0 + V_0$	$\searrow$	0
V_A	$0 + V_0$	V_0	V_0
i	$\frac{V_B}{R} = \frac{V_0}{R}$	$\searrow$	0

Avec les équations différentielles

$$i = \frac{V_B}{R} = C\frac{dV_C}{dt} = C\frac{d(V_A - V_B)}{dt} \quad avec \quad V_A = V_0 = cte \Rightarrow \frac{d(V_B)}{V_B} = -\frac{dt}{RC}$$

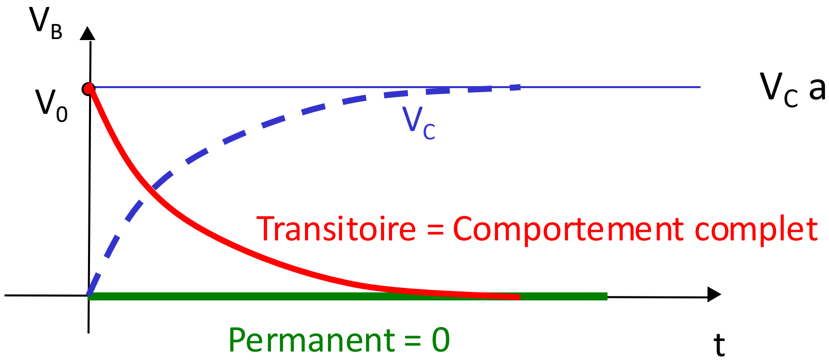
On a directement l'équation sans second membre donc
Le permanent = 0 et le transitoire est décrit par l'équation $V_B = K_2 . e^{-\frac{t}{RC}}$ K_2?????

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Haut

Analyse mathématique: Cas particulier

Cas particulier: $V_B(0) = V_0 \Rightarrow V_0 = K_2 . e^0 \Rightarrow V_0 = K_2$

$$\boxed{V_B = V_0 . e^{-\frac{t}{RC}}}$$



V_C a une allure symétrique à V_B

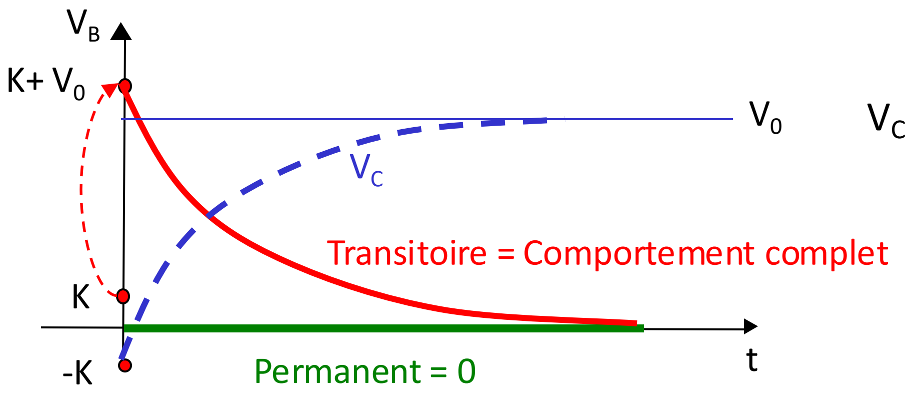
Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Haut

Analyse mathématique: Condition initiale différente

L'équation différentielle ne change pas $i = \frac{V_B}{R} = C.\frac{dV_C}{dt} = C.\frac{d(V_A - V_B)}{dt}$ et $-dV_B = \frac{1}{RC}.V_B.\mathrm{dt}$

Juste après le saut on aura $V_B(0) = K(charge\ initiale) + V_0,$ $K + V_0 = K_2.e^0 \Rightarrow K_2 = K + V_0$

$$\boxed{V_B(t) = (V_0 + K).e^{-\frac{t}{RC}}}$$



V_C a une allure symétrique à V_B

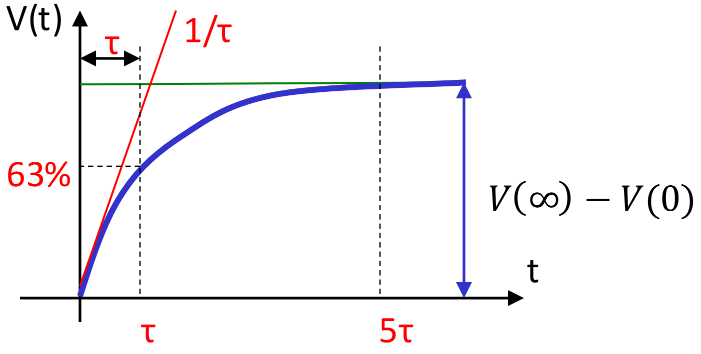
Cas Général

Passe-Bas ou passe-Haut

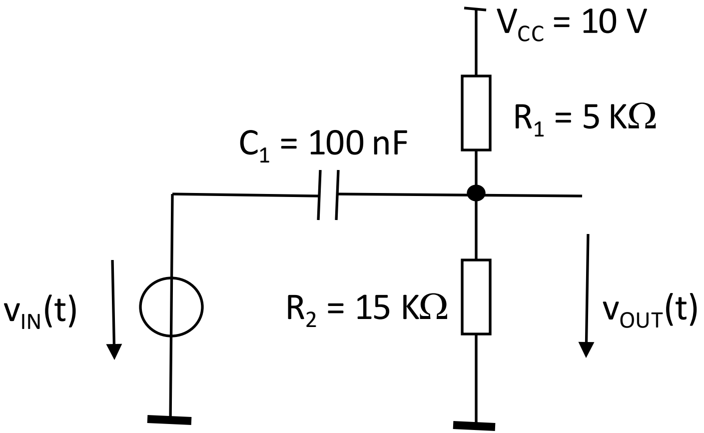
$$V(t) = \overset{\text{Etat initial}}{V(0)} + \underbrace{\overbrace{(V(\infty) - V(0))}^{\text{Chemin à parcourir}} . \overbrace{\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}^{\text{Loi de parcours OU \% du chemin parcouru}}}_{\text{Chemin parcouru}}$$

Remarques:

- RC = τ
- Propriétés de τ:
  - V(τ) = 63% de la charge
  - V(5τ) > 99% de la charge
  - V(7τ) > 99.9% de la charge

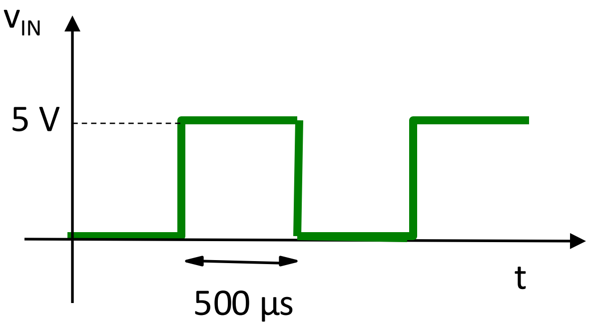


Application



Exercice 1 :
Soit $v_{IN}(t) = A \sin(2\pi ft)$, avec A = 5 V et f = 1 KHz
Quelle est l'allure du signal $v_{OUT}(t)$? ?

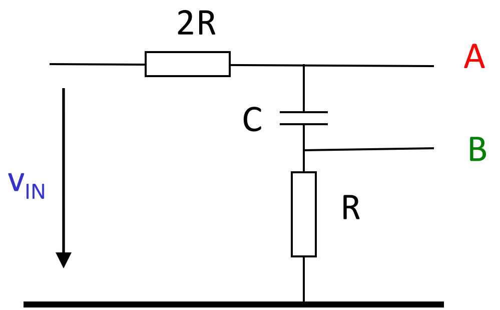
Exercice 2 :
Soit $v_{IN}(t)$, le signal carré proposé ci-contre
Quelle est l'allure du signal $v_{OUT}(t)$? ?



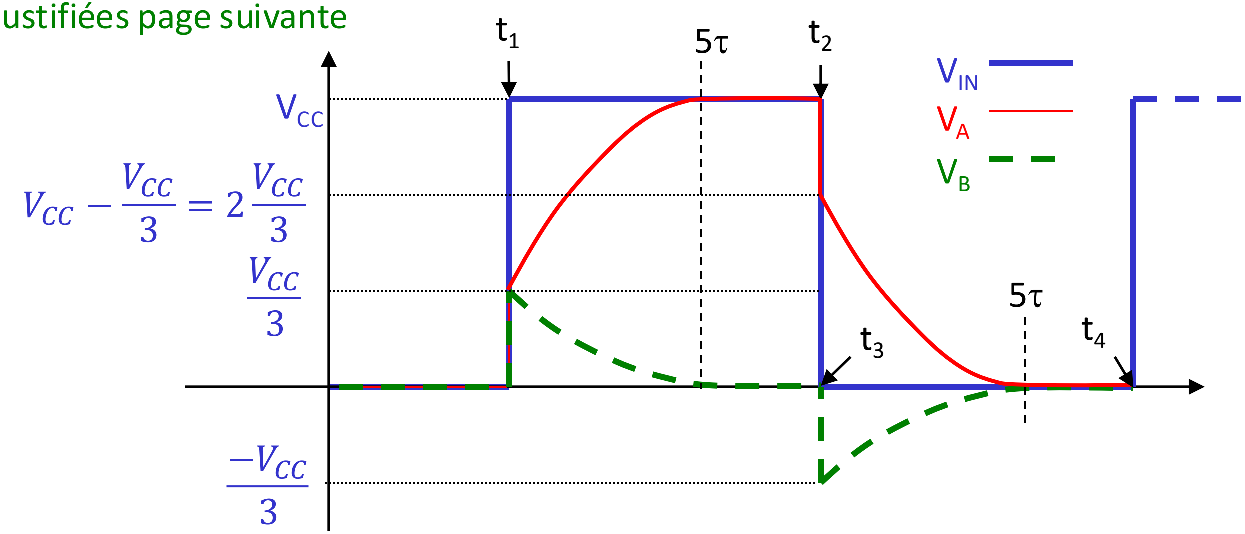
Recette de cuisine pour un signal carré

Exemple de montage analysé avec le saut indiciel

$$\tau = (R + 2R).C = 3RC$$

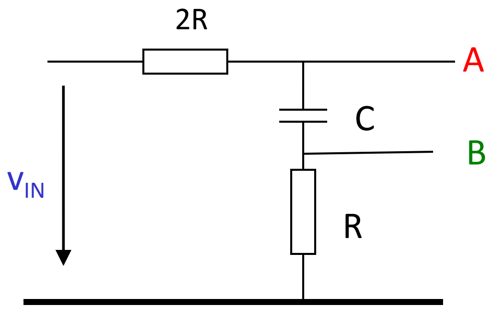


Allures obtenues justifiées page suivante

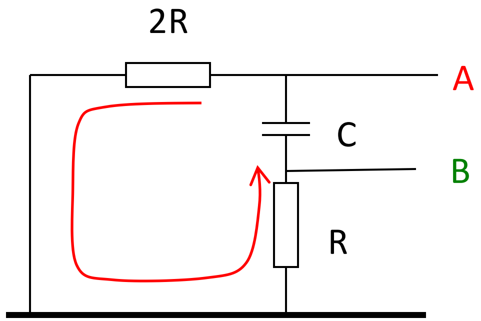


Calcul de τ

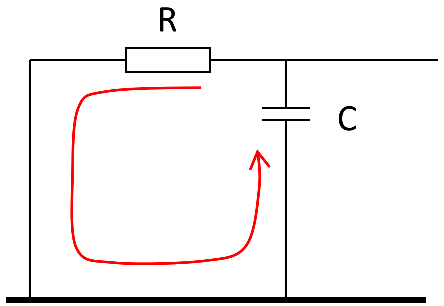
Exemple de montage analysé avec le saut indiciel



Court-circuit de V_{IN}

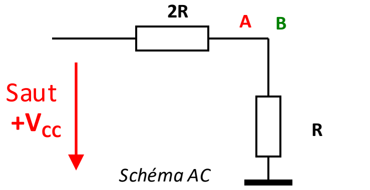
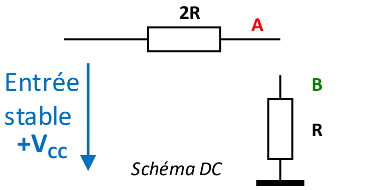
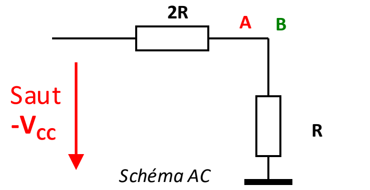
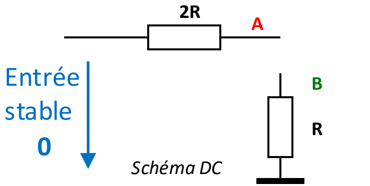


Réseau de résistances
permettant de décharger C



Ressemble au passe-bas vu en début de cours

Analyse pour quatre temps significatifs

Situation	Analyse	Schéma équivalent	V_A	V_B
Avant t_1			0	0
à t_1	On applique la **superposition** d'un signal AC (dû au saut) et d'un signal DC qui correspond aux tensions à l'équilibre établies avant le saut (*0 dans ce cas*) AC correspond à un saut **$+V_{CC}$** La capacité pour le saut se comporte comme un court-circuit		**Avant Saut** 0 + **Effet Saut** $V_{CC}\dfrac{R}{R+2R}=\dfrac{V_{CC}}{3}$	**Avant Saut** 0 + **Effet Saut** $V_{CC}\dfrac{R}{R+2R}=\dfrac{V_{CC}}{3}$
à t_2	La capacité est un circuit ouvert et le circuit est à l'équilibre. Les rapports résistifs donnent les tensions aux différents points		**Avant Saut** V_{CC}	**Avant Saut** 0
à t_3	On applique la **superposition** d'un signal AC (dû au saut) et d'un signal DC qui correspond aux tensions à l'équilibre établies avant le saut (*tensions obtenues en t2*) AC correspond à un saut **$-V_{CC}$** La capacité pour un saut se comporte comme un court-circuit		**Avant Saut** V_{CC} + **Effet Saut** $-V_{CC}\dfrac{R}{R+2R}=\dfrac{-V_{CC}}{3}$	**Avant Saut** 0 + **Effet Saut** $-V_{CC}\dfrac{R}{R+2R}=\dfrac{-V_{CC}}{3}$
à t_4	La capacité est un circuit ouvert et le circuit est à l'équilibre. Les rapports résistifs donnent les tensions aux différents points		**Avant Saut** 0	**Avant Saut** 0